

ÉLECTROMAGNÉTISME SUP

Sommaire

I. Définition des champs électrique E et magnétique B	3
II. Formules historiques : COULOMB et BIOT-SAVART	4
A. Calcul de E en électrostatique, connaissant la répartition de charges	4
1. Répartition discrète de charges	4
2. Distribution continue de charges	4
B. Calcul de B en magnétostatique, connaissant la répartition de courants	5
1. Loi de BIOT-SAVART	5
2. Exemple 1: champ sur l'axe d'une spire de courant	5
III. Propriétés de symétrie des champs	7
A. E est un vrai vecteur	7
1. Il existe un plan de symétrie	7
2. Il existe un plan d'antisymétrie	8
B. B est un pseudo vecteur	8
1. Il existe un plan de symétrie	8
2. Il existe un plan d'antisymétrie	9
IV. Propriétés de E en électrostatique et de B en magnétostatique	9
A. Propriétés intégrales	9
1. Champ électrostatique	9
a. Le champ électrostatique est à circulation conservative	9
b. Le théorème de GAUSS	10
2. Champ magnétostatique	10
a. Le champ magnétostatique est à flux conservatif	10
b. Le théorème d'AMPÈRE	10
B. Exemples	10
1. Exemple 2: champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée	10
a. Symétries et invariances	11
b. Théorème de GAUSS	11
2. Exemple 3: champ magnétique créé par un fil cylindrique parcouru par du courant	12
a. Symétries et invariances	12
b. Théorème d'AMPÈRE	13
3. Utilisations du théorème de GAUSS et du théorème d'AMPÈRE	14
C. Propriétés locales dans les cas particuliers de l'électrostatique et de la magnétostatique	14
D. Le potentiel V en électrostatique	15
1. Existence du potentiel	15
2. Expression du potentiel	15
a. Expression connaissant la répartition de charge	15
b. Lien champ-potentiel-charges	16
3. Exemple 4: potentiel créé par une boule uniformément chargée	16
a. Symétries et invariances	16
b. Potentiel	17
E. L'énergie potentielle en électrostatique	18
1. Définition et intérêt	18

2. <u>Expression</u>	18
3. <u>Le cas de deux charges en interaction</u>	18
V. <u>Équations de passage ou de continuité</u>	19
A. <u>Relations de passage</u>	19
1. <u>Champ E</u>	19
2. <u>Champ B</u>	19
B. <u>Exemples</u>	20
1. <u>Exemple 5: plan infini uniformément chargé</u>	20
2. <u>Exemple 6: nappe plane infinie de courant surfacique uniforme</u>	20
VI. <u>Lignes de champ</u>	21
1. <u>Champ E</u>	21
2. <u>Champ B</u>	21
VII. <u>Dipôle (électrostatique)</u>	22
A. <u>Définition</u>	22
B. <u>Potentiel et champ créés par un dipôle</u>	23
1. <u>Symétries</u>	23
2. <u>Potentiel</u>	24
3. <u>Champ créé par un dipôle</u>	25
C. <u>Actions subies par un dipôle dans un champ uniforme extérieur</u>	25
1. <u>Force</u>	25
2. <u>Moment</u>	25
a. <u>Rappel</u>	26
b. <u>Résultat</u>	26
c. <u>Commentaires</u>	26

Mis à jour 01/2013

I. Définition des champs électrique E et magnétique B

Une charge q_0 subit dans un champ électromagnétique une force $\vec{F}$ dont l'écriture dans un repère cartésien fait intervenir six grandeurs notées ici $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$:

$$\frac{F_x}{q_0} = a_1 + b_3 v_y - b_2 v_z$$

$$\frac{F_y}{q_0} = a_2 + b_1 v_z - b_3 v_x$$

$$\frac{F_z}{q_0} = a_3 + b_2 v_x - b_1 v_y$$

ou:

$$\begin{pmatrix} \frac{F_x}{q_0} \\ \frac{F_y}{q_0} \\ \frac{F_z}{q_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Le terme indépendant de la vitesse de la particule $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ est un tenseur de rang 1. On obtient ici le **vecteur** champ électrique $\vec{E}$ de coordonnées en repère cartésien: a_1, a_2, a_3 .

Le terme en lien avec la vitesse de la particule $\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}$ est un tenseur antisymétrique de rang 2 faisant intervenir trois grandeurs en repère cartésien: b_1, b_2, b_3 . Définir un autre objet mathématique appelé **tourneur** ou **rotateur** était sans doute une bonne idée, mais les physiciens, en l'absence de mathématiciens, ont fait de b_1, b_2, b_3 un vecteur $\vec{B}$ qui n'en était pas un tout à fait... Il a fallu introduire des conventions de trièdre direct et définir un produit intérieur entre vecteurs ou produit vectoriel. Remarquons enfin qu'en France la symbole du produit vectoriel est: $\wedge$ (hélas le même symbole que pour le produit extérieur) alors que dans tous les autres pays, on utilise le symbole: $\times$.

Finalement, la **force de LORENTZ** s'écrit:

$$\vec{F} = q_0(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

en France:

$$\boxed{\vec{F} = q_0(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

dans laquelle $\vec{E}$ est un « **vrai vecteur** » ou vecteur polaire. Unité: $V m^{-1}$ (Volt/mètre)

dans laquelle $\vec{B}$ est un « **pseudo vecteur** » ou vecteur axial. Unité: T (Tesla)

II. Formules historiques : COULOMB et BIOT-SAVART

A. Calcul de E en électrostatique, connaissant la répartition de charges

On utilise l'expression du champ issue de la **loi de COULOMB** (le champ créé par une charge est en $\frac{1}{r^2}$)

1. Répartition discrète de charges

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3}$$

2. Distribution continue de charges

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Domaine chargé}} \frac{dq(P) \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}}$$

avec dq :

élément de charge (ou parfois charge élémentaire)

unité: C (Coulomb)

possède trois expressions selon que la charge est volumique, surfacique, linéique:

$\rho d\tau$	ρ : densité de charge volumique	en C/m^3
σdS	σ : densité de charge surfacique	en C/m^2
λdl	λ : densité de charge linéique	en C/m

pour faire le calcul :

déterminer les trois coordonnées de $\vec{PM}$ dans une base fixe en utilisant les coordonnées de M et celles de P . D'où $\|\vec{PM}\|$. D'où, trois intégrales à calculer pour obtenir les trois coordonnées de $\vec{E}$. On remarquera qu'une étude préalable de symétrie peut rendre inutile le calcul de certaines de ces intégrales.

B. Calcul de B en magnétostatique, connaissant la répartition de courants

1. Loi de BIOT-SAVART

On utilise la loi de BIOT-SAVART

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Domaine de courants}} \frac{d\vec{C}(P) \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

avec $d\vec{C}$:

élément de courant (et non pas courant élémentaire noté dI)

unité: $A \times m$ (AMPÈRE $\times$ mètre)

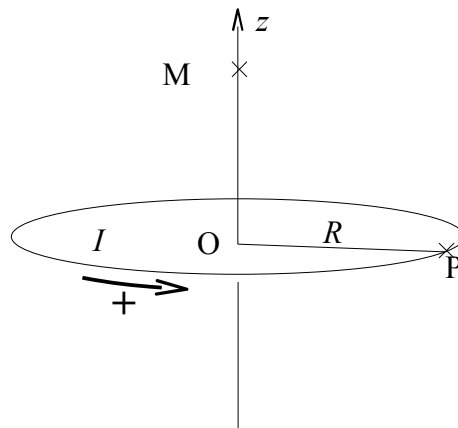
possède trois expressions selon que le courant est volumique, surfacique, linéique:

$$d\vec{C} = \begin{matrix} \vec{j} d\tau \\ \vec{j}_s dS \\ I d\vec{l} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{j}: \text{densité volumique de courant} & \text{en } A/m^2 \\ \vec{j}_s: \text{densité surfacique de courant} & \text{en } A/m \\ I: \text{intensité du courant} & \text{en } A \end{matrix}$$

pour faire le calcul :

déterminer les trois coordonnées de $\vec{PM}$ dans une base fixe en utilisant les coordonnées de M et celles de P . D'où $\|\vec{PM}\|$. D'où, trois intégrales à calculer pour obtenir les trois coordonnées de $\vec{B}$. On remarquera qu'une étude préalable de symétrie peut rendre inutile le calcul de certaines de ces intégrales.

2. Exemple 1: champ sur l'axe d'une spire de courant



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

avec:

$$\vec{OM} = z \vec{u}_z$$

$$\vec{OP} = R \vec{u}_r$$

$$d\vec{l} = d\vec{OP} = R d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{PM} = z \vec{u}_z - R \vec{u}_r \text{ et}$$

$$\|\vec{PM}\| = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{PM} = R z d\theta \vec{u}_r + R^2 d\theta \vec{u}_z$$

finalement:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\oint_{P \in \text{spire}} R z d\theta \vec{u}_r + \oint_{P \in \text{spire}} R^2 d\theta \vec{u}_z \right)$$

la deuxième intégrale vaut $2\pi R^2 \vec{u}_z$

alors que la première intégrale est nulle

(on pouvait le prévoir sachant que M appartient à une infinité de plans d'antisymétrie contenant Oz donc le champ en M est selon Oz)

(on peut l'obtenir par calcul en travaillant dans une base fixe avec $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R^2 \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

ce qui donne la formule connue:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z$$

(α est l'angle sous lequel du point M on voit un rayon).

III. Propriétés de symétrie des champs

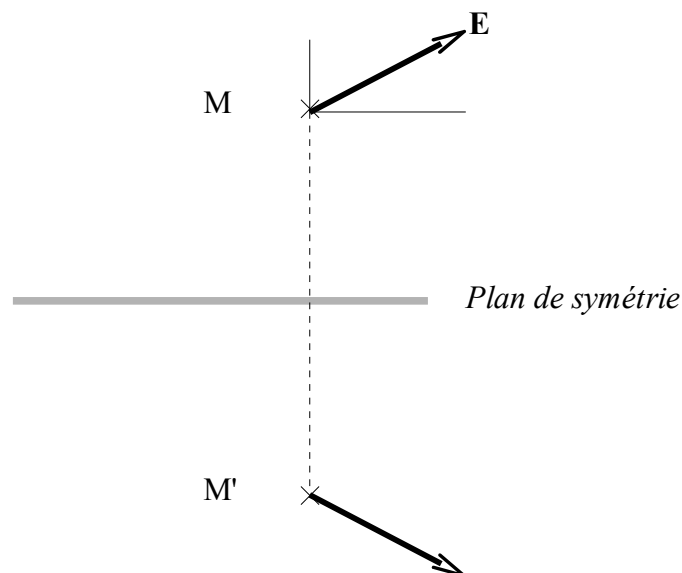
A. $\vec{E}$ est un vrai vecteur

1. Il existe un plan de symétrie

Le plan est un plan de symétrie si:

$$\rho(M' \text{ symétrique de } M \text{ / plan}) = \rho(M) \quad \text{et}$$

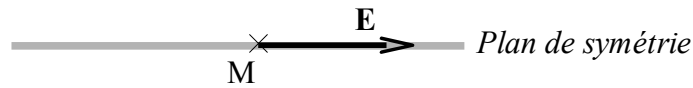
$$\vec{j}(M' \text{ symétrique de } M \text{ / plan}) = \vec{j}(M)$$



$$\vec{E}(M' \text{ symétrique de } M \text{ / plan}) = \text{symétrique de } \vec{E}(M) \text{ / plan}$$

Cette propriété sera intéressante pour établir la parité ou l'imparité des coordonnées du champ par rapport aux coordonnées de l'espace.

Dans le cas particulier où $M = M'$ appartient au plan de symétrie, on en déduit:



Le champ $\vec{E}$ en un point M d'un plan de symétrie se trouve dans le plan de symétrie

2. Il existe un plan d'antisymétrie

Le plan est un plan d'antisymétrie si:

$$\rho(M' \text{ symétrique de } M / \text{plan}) = -\rho(M) \text{ et}$$

$$\vec{j}(M' \text{ symétrique de } M / \text{plan}) = -\vec{j}(M)$$

On a :

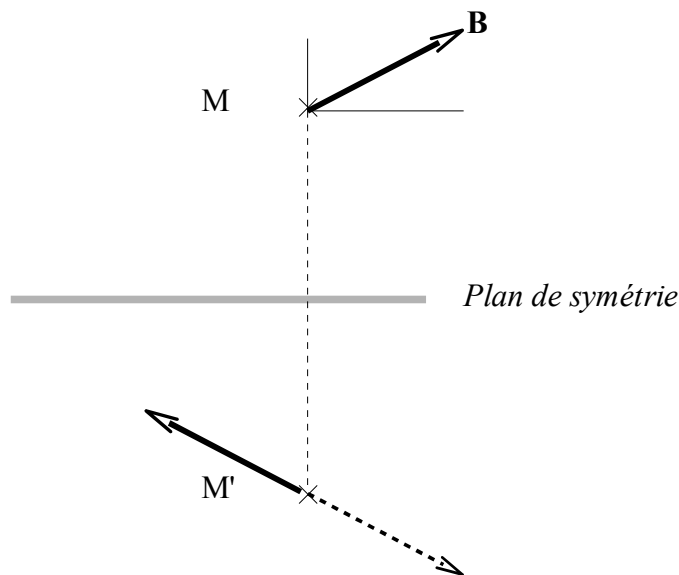
$$\vec{E}(M' \text{ symétrique de } M / \text{plan}) = -\text{symétrique de } \vec{E}(M) / \text{plan}$$

Dans le cas particulier où $M = M'$ appartient au plan d'antisymétrie, on en déduit:

Le champ $\vec{E}$ en un point M d'un plan d'antisymétrie est perpendiculaire au plan d'antisymétrie

B. B est un pseudo vecteur

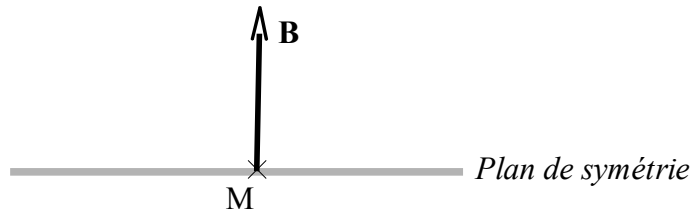
1. Il existe un plan de symétrie



$$\vec{B}(M' \text{ symétrique de } M / \text{plan}) = -\text{symétrique de } \vec{B}(M) / \text{plan}$$

Cette propriété sera intéressante pour établir la parité ou l'imparité des coordonnées du champ par rapport aux coordonnées de l'espace.

Dans le cas particulier où $M = M'$ appartient au plan de symétrie, on en déduit:



Le champ $\vec{B}$ en un point M d'un plan de symétrie est perpendiculaire au plan de symétrie

2. Il existe un plan d'antisymétrie

On a :

$$\vec{B}(M' \text{ symétrique de } M / \text{plan}) = \text{symétrique de } \vec{B}(M) / \text{plan}$$

Dans le cas particulier où $M = M'$ appartient au plan d'antisymétrie, on en déduit:

Le champ $\vec{B}$ en un point M d'un plan d'antisymétrie se trouve dans le plan d'antisymétrie

IV. Propriétés de E en électrostatique et de B en magnétostatique

A. Propriétés intégrales

1. Champ électrostatique

a. Le champ électrostatique est à circulation conservative

Loi de FARADAY appliquée à l'électrostatique: (analogies avec la mécanique des fluides: ici pas de source de rotation –« type batteur »-qui fait circuler le fluide)

La circulation de $\vec{E}$ sur toute courbe fermée est nulle

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

d'où $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(V_B - V_A)$ ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée et existence d'un potentiel.

b. *Le théorème de GAUSS*

Le flux sortant de $\vec{E}$ à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure sur ϵ_0

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$$

(analogies avec la mécanique des fluides: source qui émet du fluide en régime permanent...)

2. Champ magnétostatique

a. *Le champ magnétostatique est à flux conservatif*

(analogies: pas de source émettant du fluide...)

Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

d'où $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ (**cours de maths spé**) ne dépend que du contour sur lequel s'appuie une surface ouverte

b. *Le théorème d'AMPÈRE*

La circulation de $\vec{B}$ sur une courbe fermée orientée est égale à l'intensité (algébrique) enlacée multipliée par μ_0

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

(analogies: les sources sont des sources de rotation—« type batteur »—qui font circuler le fluide)

B. Exemples

1. Exemple 2: champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée

Boule de rayon R , de centre O , chargée par Q .

a. *Symétries et invariances:*

Un point M quelconque appartient à une infinité de plans de symétrie contenant OM (selon un diamètre) donc $\vec{E}$ est selon $\vec{OM}$:

$$\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

L'invariance en rotation selon θ et φ permet alors d'écrire:

$$\boxed{\vec{E} = E(r) \vec{u}_r}$$

b. *Théorème de GAUSS:*

On applique le théorème de GAUSS à une surface fermée Σ passant par le point M :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{intérieur}}}{\epsilon_0}.$$

Puisque $\vec{E}$ est selon $\vec{u}_r$, il faut considérer une surface élémentaire telle que $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ alors:

$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} E dS$. Puisque E n'est fonction que de r , il faut considérer une surface telle que $r = \text{cte}$ alors: $\oiint_{\Sigma} E(r) dS = E(r) \oiint_{\Sigma} dS = E(r) S$. La surface de GAUSS à choisir est donc une sphère de centre O passant par M .

- M à l'extérieur de la boule

Pour la région ($r > R$) le théorème de GAUSS à la sphère de rayon r donne:

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

d'où:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{Q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\boxed{\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{OM}}$$

- M à l'intérieur de la boule

Pour la région ($r < R$) le théorème de GAUSS à une sphère de rayon r donne:

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$$

avec, la charge intérieure étant proportionnelle au volume,

$$Q_{\text{intérieure}} = Q \left(\frac{r}{R} \right)^3$$

d'où:

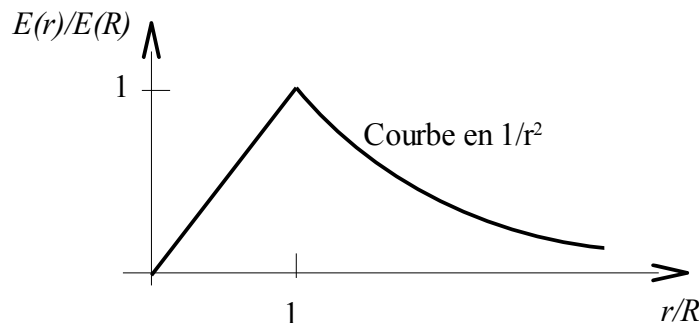
$$\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\boxed{\vec{E}(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{OM}}$$

- le cas M sur la surface de la boule $r=R$ n'est pas à traiter en particulier.

On constate que la limite à gauche ($E(r=R-)$) et la limite à droite ($E(r=R+)$) sont les mêmes. L'expression du champ en $r=R$ est donc $\vec{E}(r=R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r$.



2. Exemple 3: champ magnétique créé par un fil cylindrique parcouru par du courant

Fil cylindrique de rayon R , d'axe Oz , parcouru par I .

a. Symétries et invariances:

Un point M quelconque appartient à un plan de symétrie contenant Oz donc $\vec{B}$ (pseudo-vecteur) est perpendiculaire à ce plan:

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$$

L'invariance en rotation selon θ et l'invariance en translation selon z (cylindre infini)

permettent alors d'écrire:

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

b. *Théorème d'AMPÈRE:*

On applique le théorème d'AMPÈRE à une courbe fermée C passant par le point M :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}.$$

Puisque $\vec{B}$ est selon $\vec{u}_\theta$, il faut considérer un déplacement élémentaire tel que $d\vec{l} = dl \vec{u}_\theta$ alors: $\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \oint_C B dl$. Puisque B n'est fonction que de r , il faut considérer une courbe telle que $r = \text{cte}$ alors: $\oint_C B(r) dl = B(r) \oint_C dl = B(r) L$. La courbe d'AMPÈRE à choisir est un cercle centré sur l'axe Oz , dans un plan $z = \text{cte}$ et passant par M . On oriente le plan contenant le cercle par $\vec{u}_z$ de sorte que pour l'intégration θ varie de 0 à 2π et non l'inverse.

- M à l'extérieur du fil

Pour la région ($r > R$) le théorème d'AMPÈRE pour un cercle de rayon r donne:
 $B \times 2\pi r = \mu_0 I$

d'où:

$$\vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- M à l'intérieur du fil

Pour la région ($r < R$) le théorème d'AMPÈRE pour un cercle de rayon r donne:
 $B \times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

avec, le courant enlacé étant proportionnel à la surface,

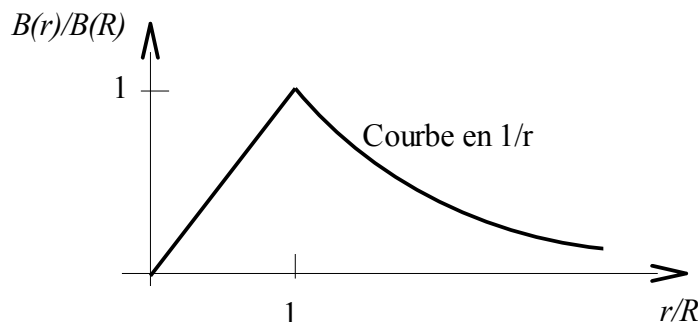
$$I_{\text{enlacé}} = I \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

d'où:

$$\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta$$

- le cas M sur la surface du fil $r = R$ n'est pas à traiter en particulier.

On constate que la limite à gauche ($B(r = R^-)$) et la limite à droite ($B(r = R^+)$) sont les mêmes. L'expression du champ en $r = R$ est donc $\vec{B}(r = R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$.



3. Utilisations du théorème de GAUSS et du théorème d'AMPÈRE

On utilise le théorème de GAUSS dans des problèmes de « haute symétrie »

- problème à symétrie sphérique : $\rho = \rho(r, \theta, \phi)$
- problème à symétrie cylindrique : $\rho = \rho(r, \theta, z)$
- problème à symétrie plane : $\rho = \rho(x, y, z)$

La partie de la surface passant par M est choisie telle que $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E S$

On utilise le théorème d'AMPÈRE dans des problèmes de « haute symétrie »

- problème à symétrie cylindrique : $\vec{j} = j(r, \theta, z) \vec{u}_z$
ou : $\vec{j} = j(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$
- problème à symétrie plane : $\vec{j} = j(x, y, z) \vec{u}_y$
- problème à symétrie torique

La partie de la courbe passant par M est choisie telle que $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B L$

C. Propriétés locales dans les cas particuliers de l'électrostatique et de la magnétostatique

(cours de maths spé)

Nom	Équation locale vue en spé	Équation intégrale vue en sup
Équation de MAXWELL-FARADAY	$\overrightarrow{\text{rot}}_M \vec{E} = 0$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
Équation de MAXWELL-GAUSS	$\text{div}_M \vec{E} = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$

Équation de MAXWELL-flux	$\operatorname{div}_M \vec{B} = \vec{0}$	$\oiint \vec{B} d\vec{S} = \vec{0}$
Équation de MAXWELL-AMPÈRE	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}_M \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(M)$	$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

D. Le potentiel V en électrostatique

1. Existence du potentiel

En lien avec $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, on sait que $\vec{E}$ dérive d'un gradient (le gradient de la fonction de point : $-V(M)$). On rappelle les différentes propriétés:

- $\vec{E}$ dérive d'un gradient: $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}_M V$
- La circulation élémentaire de $\vec{E}$ est une différentielle de fonction: $\vec{E} d\vec{l} = -dV$
- La circulation de $\vec{E}$ entre deux points ne dépend pas de la courbe suivie mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée $\int_{AB} \vec{E} d\vec{l} = -(V(B) - V(A)) = -\Delta V$
- La circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe fermée est nulle car $\vec{E}$ est à circulation conservative $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$
- **(programme spé)** $\overrightarrow{\operatorname{rot}}_M \vec{E} = 0$

2. Expression du potentiel

a. Expression connaissant la répartition de charge

- On part de l'expression du potentiel pour une charge ponctuelle placée en P

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{P}\vec{M}\|}$$

On retrouve ce résultat en partant de

$$dV = -\vec{E} d\vec{l}$$

$$\text{avec: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \text{ et } d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi.$$

Finalement:

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{dr}{r^2} \text{ et}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{Constante}.$$

La constante est choisie nulle, ce qui revient à faire V nul à l'infini, une façon de se dire que l'effet de la charge « ne se fait plus sentir à l'infini... ».

- Répartition discrète de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\|\vec{P_i M}\|}$$

(expression obtenue par superposition à partir de la formule pour une charge. Cette expression suppose V nul à l'infini et donc absence de charge à l'infini).

- Distribution continue de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Domaine chargé}} \frac{dq(P)}{\|\vec{PM}\|}$$

(Cette expression suppose V nul à l'infini et donc un domaine chargé borné).

b. Lien champ-potentiel-charges

Dans les exercices de maths sup, on pourrait vouloir déterminer le potentiel (grandeur scalaire donc plus simple qu'un vecteur) connaissant les charges puis en déduire le champ par $\vec{E}(M) = -\text{grad}_M V$. Il faudrait, pour apprécier le gradient en un point, déterminer l'évolution du potentiel dans toutes les directions par des calculs d'intégrales ou par exemple déterminer l'expression générale du potentiel en un point quelconque... Difficile semble-t-il.

On s'intéresse souvent à un point particulier, à un axe, souvent le problème est abordable par le théorème de GAUSS. Le calcul direct du champ semble alors plus direct. Possible parfois d'en déduire le potentiel par $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ (prudence... si on ne connaît pas $\vec{E}$ en tout point)

Dans les exercices en maths spé, il sera courant de n'obtenir les charges qu'en fin de problème et donc les méthodes intégrales qui supposent les charges connues ne sont pas adaptées.

3. Exemple 4: potentiel créé par une boule uniformément chargée

Boule de rayon R , de centre O , chargée par Q .

a. Symétries et invariances:

A priori

$$V = V(r, \theta, \varphi)$$

L'invariance en rotation selon θ et φ permet alors d'écrire:

$$V = V(r)$$

On peut remarquer que l'on retrouve ici rapidement les symétries et invariances pour le champ $\vec{E}$:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} V \text{ donne ici} \\ &= -\frac{dV(r)}{dr} \vec{u}_r \\ \vec{E} &= E(r) \vec{u}_r\end{aligned}$$

b. Potentiel

Il est hors de question de faire le calcul direct du potentiel par l'intégrale triple. On utilise les résultats déjà obtenus pour le champ (en appliquant le théorème de GAUSS).

On sait que, en l'absence de charges à l'infini, le potentiel est nul à l'infini et on utilise la relation:

$dV = -E(r) dr$. On commence par étudier $r > R$, ce qui nous permettra d'obtenir directement la constante. Le potentiel est continu pour une distribution volumique ou surfacique.

- M à l'extérieur de la boule

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\int_0^V dV' = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr'$$

$$V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- M à l'intérieur de la boule

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\int_V^{V(R)} dV = - \int_r^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r' dr'$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - V(r) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$$

$$V(r < R) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

E. L'énergie potentielle en électrostatique

1. Définition et intérêt

Si le travail élémentaire de la force subie par la charge q_0 est la différentielle d'une fonction (différentielle totale exacte)

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

alors la force dérive d'une énergie potentielle E_p

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p}$$

Dans de nombreux problèmes, il est plus facile d'obtenir l'énergie. En faisant alors un bilan d'énergie pour une transformation élémentaire, on obtient l'expression de la force cherchée.

2. Expression

On a, en électrostatique: $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ donc $\vec{F} = -q_0 \overrightarrow{\text{grad}} V = -\overrightarrow{\text{grad}}(q_0 V)$.

On cherche E_p tel que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$

donc:

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\overrightarrow{\text{grad}}(q_0 V)$$

$$E_p = q_0 V + \text{constante}$$

Le potentiel est nul à l'infini (charges dans un domaine borné) et l'on décide que l'énergie potentielle d'interaction de q_0 avec les charges du domaine est nulle quand q_0 est à l'infini, très loin du domaine chargé.

On choisit donc:

$$\boxed{E_p = q_0 V}$$

(V désigne le potentiel, au point où se trouve q_0 , créé par les autres charges)

3. Le cas de deux charges en interaction

On envisage deux charges ponctuelles q_1 en A_1 et q_2 en A_2 en interaction, distantes de $r_{1,2}$ avec $\overrightarrow{A_1 A_2} = \vec{r}_{1,2} = r_{1,2} \vec{u}_{1,2}$.

- On peut envisager que cette distribution ait été créée en apportant q_2 en A_2 dans le champ de q_1 donc

$$E_p = q_2 V_1 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}}$$

d'où l'énergie potentielle traduisant l'interaction de deux charges:

$$\boxed{E_{p\ 1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}}}$$

- On aurait pu envisager que cette distribution ait été créée en apportant q_1 en A_1 dans le champ de q_2 donc

$$E_P = q_1 V_2 = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}}$$

ce qui donne la même expression bien entendu.

- On pouvait aussi imaginer de rapprocher les deux charges et l'on obtenait toujours la même expression.

On pourra remarquer que l'on pourrait écrire de manière alors symétrique:

$$E_P = q_2 V_1 = q_1 V_2 = \frac{1}{2}(q_1 V_2 + q_2 V_1) \quad , \quad \text{le } \frac{1}{2} \text{ étant nécessaire car l'on compte deux fois le même}$$

terme. On retrouvera souvent ce $\frac{1}{2}$ dans des formules d'énergie en électromagnétisme.

V. Équations de passage ou de continuité

Les équations locales de MAXWELL supposent que les sources ($\rho(M)$, $\vec{j}(M)$) sont volumiques.

Lorsque la répartition de sources se trouve en volume, dans une couche d'épaisseur négligeable, on modélise parfois par une surface idéale en négligeant l'épaisseur. Au cours de la traversée de la couche, les champs changent progressivement de valeur mais si l'on modélise par une surface au sens mathématique du terme, on a apparition d'une discontinuité, le champ n'étant plus défini sur la surface elle-même. Les sources sont notées alors ($\sigma(M)$, $\vec{j}_s(M)$).

A. Relations de passage

1. Champ E

Il y a continuité de la composante tangentielle et discontinuité de la composante normale.

Pour les champs au voisinage de M dans le milieu 1 ou dans le milieu 2, on a :

$$\vec{E}_{\text{voisinage milieu 2}}(M) - \vec{E}_{\text{voisinage milieu 1}}(M) = \frac{\sigma_{\text{au point}}(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{de 1 vers 2}}$$

$$V_2(M) - V_1(M) = 0$$

2. Champ B

Il y a continuité de la composante normale et discontinuité de la composante tangentielle.

Pour les champs au voisinage de M dans le milieu 1 ou dans le milieu 2, on a :

$$\vec{B}_{\text{voisinage milieu 2}}(M) - \vec{B}_{\text{voisinage milieu 1}}(M) = \mu_0 \vec{j}_{s \text{ au point}}(M) \wedge \vec{n}_{\text{de 1 vers 2}}$$

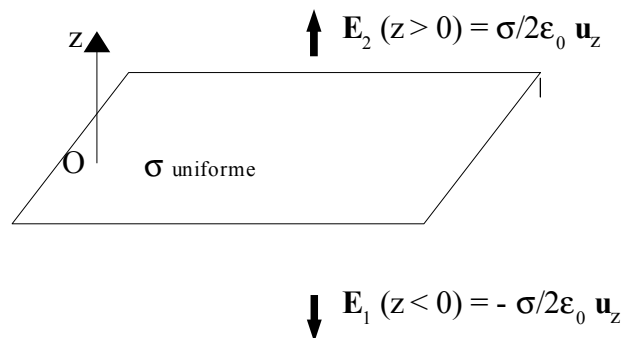
et

$$\vec{A}_2(M) - \vec{A}_1(M) = \vec{0} \quad (\text{cours de maths spé})$$

B. Exemples

1. Exemple 5: plan infini uniformément chargé

On veut vérifier la relation de passage dans le cas d'un plan uniformément chargé en surface. On rappelle le résultat pour un plan infini uniformément chargé en électrostatique (voir figure).



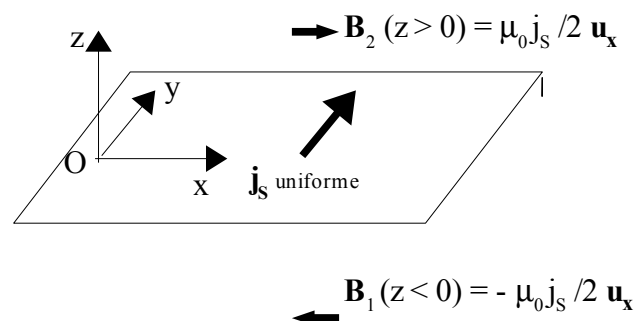
vérification:

$$\vec{E}_{\text{voisinage milieu 2}} - \vec{E}_{\text{voisinage milieu 1}} = \frac{\sigma_{\text{au point}}}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{de 1 vers 2}}$$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{de 1 vers 2}} \quad \text{car ici } \vec{n}_{\text{de 1 vers 2}} = \vec{u}_z$$

2. Exemple 6: nappe plane infinie de courant surfacique uniforme

On veut vérifier la relation de passage dans le cas d'une nappe plane de courant surfacique uniforme. On rappelle le résultat pour une nappe infinie de courant surfacique uniforme en magnétostatique (voir figure).



vérification:

$$\vec{B}_{\text{voisinage milieu 2}} - \vec{B}_{\text{voisinage milieu 1}} = \mu_0 \vec{j}_S \text{ au point} \wedge \vec{n}_{\text{de 1 vers 2}}$$

$$\frac{\mu_0 j_S}{2} \vec{u}_x - \left(-\frac{\mu_0 j_S}{2} \vec{u}_x \right) = \mu_0 j_S \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z \text{ car ici } \vec{n}_{\text{de 1 vers 2}} = \vec{u}_z$$

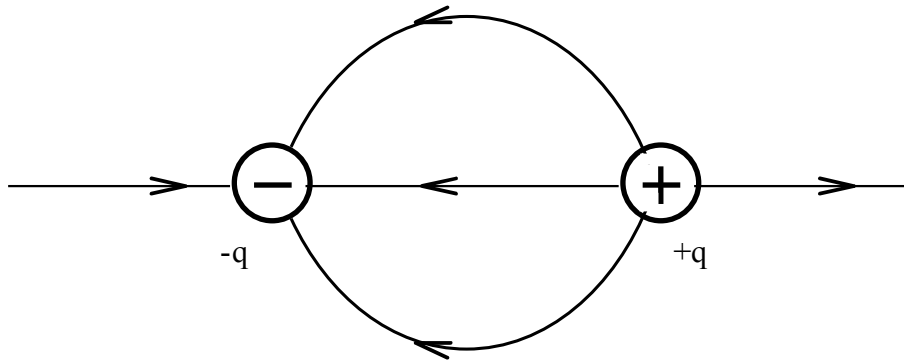
La relation de passage est donc vérifiée puisque $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$.

VI. Lignes de champ

Deux lignes de champ ne peuvent se croiser. Lorsque cela semble se produire en un point, c'est qu'en ce point, soit le champ est nul, soit le champ n'est pas défini.

1. Champ E

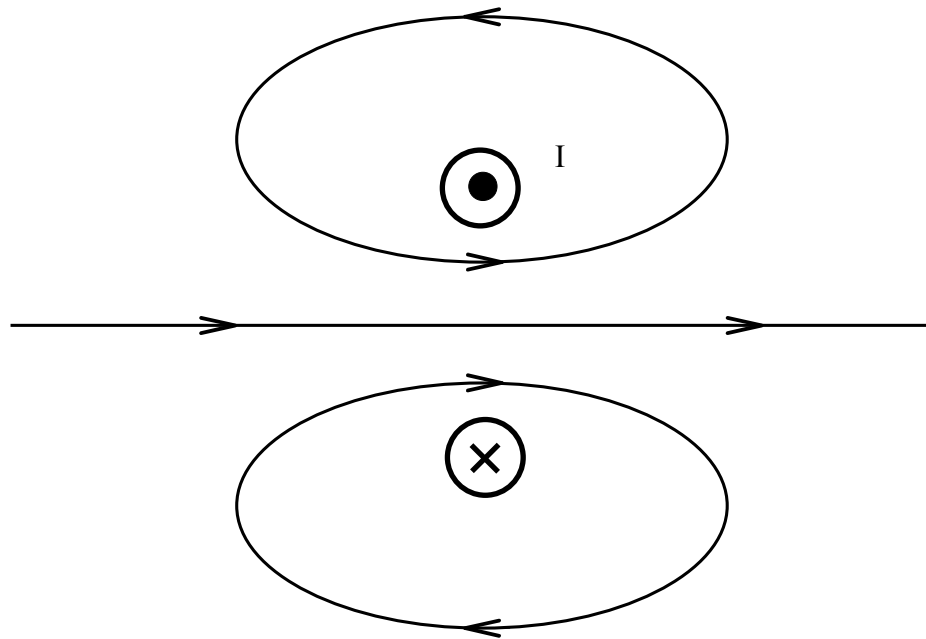
Le champ $\vec{E}$ diverge (ou converge) à partir des sources de charges.



- Les lignes de champ $\vec{E}$ sont orientées vers les potentiels décroissants ($\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ donc en sens contraire du gradient de potentiel).
- Les lignes de champ $\vec{E}$ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles ($dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ si l'on choisit un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ perpendiculaire à $\vec{E}$).
- Les lignes de champ $\vec{E}$ ne peuvent être fermées sur elles-mêmes (le potentiel ne peut décroître sans arrêt le long de la ligne de champ pour retrouver la même valeur après un tour).

2. Champ B

Le champ $\vec{B}$ tourbillonne autour des sources de courant.



- Les lignes de champ $\vec{B}$ sont obligatoirement fermées sur elles-mêmes (en lien avec la propriété du flux d'être conservatif pour toute surface fermée).

VII. Dipôle (électrostatique)

A. Définition

En se limitant ici aux deux premiers termes, une répartition quelconque q_i de charges crée, à grande distance, un potentiel de la forme:

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\|\vec{OM}\|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0\|\vec{OM}\|^3} + \dots$$

ou avec $\vec{r} = \vec{OM}$:

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

ou avec $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots$$

Le premier terme ou terme monopolaire est en $\frac{1}{r}$ avec $Q = \sum_i q_i$.

Le deuxième terme ou terme dipolaire est en $\frac{1}{r^2}$ avec $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OA}_i$ (qui a priori dépend du choix de l'origine O)

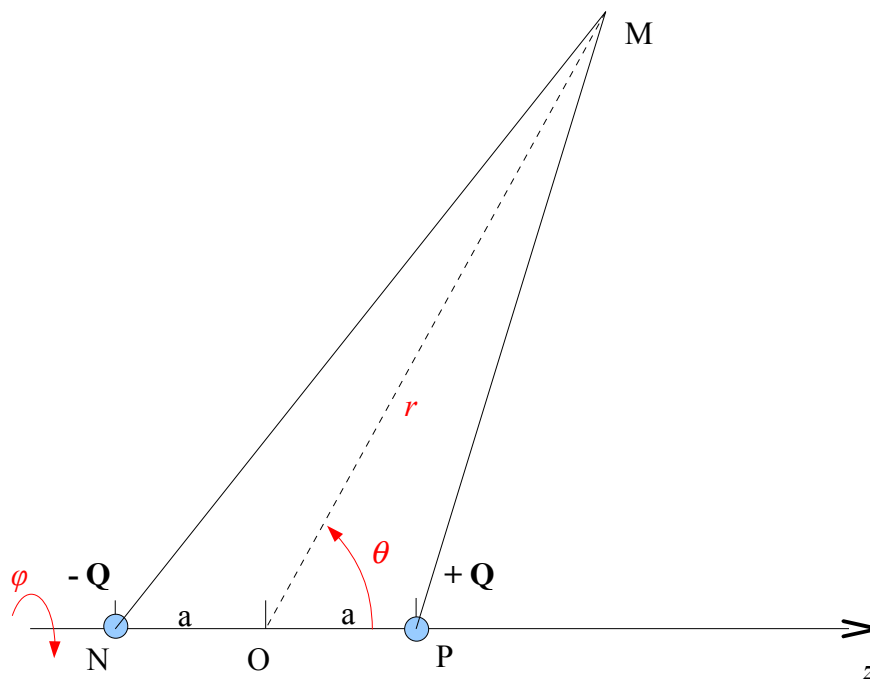
Si $Q \neq 0$ alors à grande distance $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. On choisit l'origine O au barycentre des charges. Alors $\vec{p}$ est nul.

Si $Q = 0$ (et $\vec{p} \neq \vec{0}$) alors à grande distance $V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. On choisit l'origine O au milieu de NP avec N : barycentre des charges négatives et P : barycentre des charges positives. Il est facile de vérifier que $\vec{p}$ est ici indépendant du choix de l'origine O .

Par définition, un dipôle $\vec{p}$ crée un potentiel en $\frac{1}{r^2}$ de la forme $V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

B. Potentiel et champ créés par un dipôle

On envisage un doublet (charge ponctuelle $-Q$ en N et charge ponctuelle $+Q$ en P . On appelle O le milieu de NP . On a expliqué précédemment que, à grande distance, le potentiel créé par ce doublet tend vers le potentiel dipolaire.



1. Symétries

Le point M est repéré en coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O .

Le problème est invariant en rotation autour de l'axe de révolution Oz sur lequel se trouvent les charges ($-Q$ en N de cote $-a$ et $+Q$ en P de cote a , O est le milieu de NP). Le

potentiel et le champ sont donc indépendants de l'angle φ soit:

$$V = V(r, \theta)$$

Un point M quelconque appartient au plan de symétrie (OM, Oz) donc le champ en M appartient à ce plan et n'a pas de coordonnée selon $\vec{u}_\varphi$:

$$\vec{E} = E_r(r, \theta) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$$

2. Potentiel

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

avec (théorème d'Al-Kashi):

$$r_+^2 = r^2 - 2ar \cos \theta + a^2$$

$$r_+ = r \left(1 - 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

qui au deuxième ordre en $\frac{a}{r}$ donne:

$$\frac{1}{r_+} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

de même:

$$\frac{1}{r_-} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

On a , au deuxième ordre en $\frac{a}{r}$:

$$V \simeq \frac{2Q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V \simeq \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

avec pour le moment dipolaire de ce doublet:

$$\vec{p} = Q \vec{OP} + (-Q) \vec{ON}$$

$$\vec{p} = Q \vec{NP}$$

$$\vec{p} = 2Q a \vec{u}_z = p \vec{u}_z$$

Finalement le potentiel créé a grande distance tend vers:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

3. Champ créé par un dipôle

On fait :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$$

(l'expression du gradient en coordonnées sphériques est connue).

Le calcul donne pour résultat :

$$\vec{E} = \frac{2 p \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

C. Actions subies par un dipôle dans un champ uniforme extérieur

Le dipôle est supposé rigide c'est-à-dire que la valeur de son moment dipolaire ne change pas dans le champ extérieur donc $\|\vec{p}\|$ est constante.

Pour l'étude, on partira d'un doublet et on fera tendre la distance entre les charges vers zéro.

1. Force

Pour le doublet, la charge $-Q$ en N subit la force $-Q \vec{E}$ et la charge $+Q$ en P subit la force $+Q \vec{E}$. La résultante des forces $\vec{F}$ subies par le doublet est nulle.

Le résultat est identique pour le dipôle.

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Les actions subies sont donc équivalentes à un couple.

2. Moment

a. *Rappel*

Le moment de forces est, pour un couple, indépendant du point. En effet, pour une répartition de forces $\vec{f}_i$ appliquées aux points A_i , on a:

$$\vec{\mathcal{M}}(O') = \sum_i (\vec{O'A_i} \wedge \vec{f}_i)$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O') = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OA_i}) \wedge \vec{f}_i$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O') = \sum_i (\vec{O'O} \wedge \vec{f}_i) + \sum_i (\vec{OA_i} \wedge \vec{f}_i)$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O') = \vec{O'O} \wedge \sum_i (\vec{f}_i) + \vec{\mathcal{M}}(O)$$

d'où la formule de transport du moment avec $\vec{F}$ résultante des forces:

$$\vec{\mathcal{M}}(O') = \vec{\mathcal{M}}(O) + \vec{O'O} \wedge \vec{F}$$

ici puisque $\vec{F}$ est nulle:

$$\vec{\mathcal{M}}(O') = \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{I}$$

b. *Résultat*

En faisant le calcul en O (quelconque):

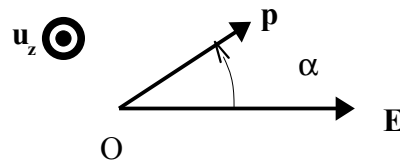
$$\vec{I} = \vec{OP} \wedge (Q\vec{E}) + \vec{ON} \wedge (-Q\vec{E})$$

$$\vec{I} = (\vec{OP} - \vec{ON}) \wedge (Q\vec{E})$$

$$\vec{I} = Q \vec{NP} \wedge \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

Le résultat est identique pour le dipôle.

c. *Commentaires*

On a donc $\vec{I} = I \vec{u}_z = -\|\vec{p}\| \|\vec{E}\| \sin \alpha \vec{u}_z$. Le couple est un couple de rappel qui tend à ramener $\vec{p}$ sur $\vec{E}$.

Il y a deux positions d'équilibre: $\alpha=0$ et $\alpha=\pi$. La position $\alpha=0$ est la position d'équilibre stable.